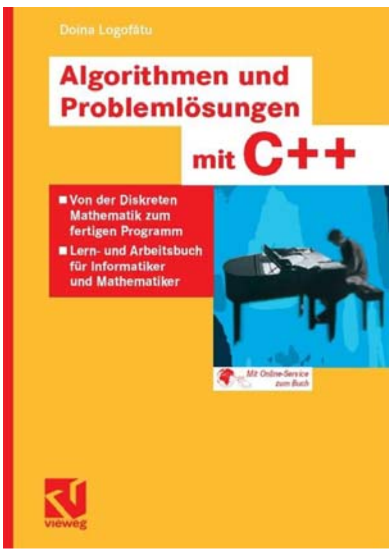
KOMBINATORIK

Doina Logofătu
Hochschule München, FK 07
14 und 15 April 2008

Was ist Kombinatorik? Beispiele für Fragen und Aufgaben aus der Kombinatorik.
Was machen wir heute? (Diskussion)

1. Prinzip der Inklusion und Exklusion
2. Schubfachprinzip
3. Permutationen
4. Variationen
5. Kombinationen
6. Binomialkoeffizienten

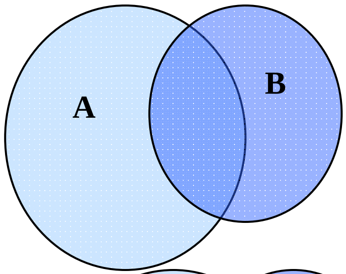


Algorithmen und Problemlösungen mit C++
www.algorithmen-und-problemloesungen.de

Prinzip der Inklusion und Exklusion

(Siebformel, Prinzip der Einschließung und Ausschließung)

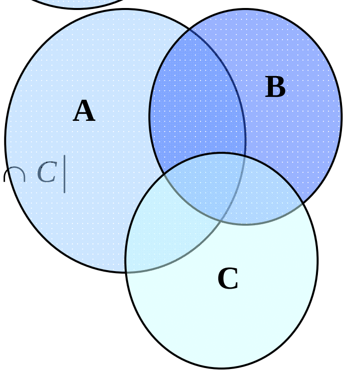
Für 2 endlichen Mengen *A*, *B*:



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

(Diskussion)

Für 3 endlichen Mengen *A*, *B*, *C*:

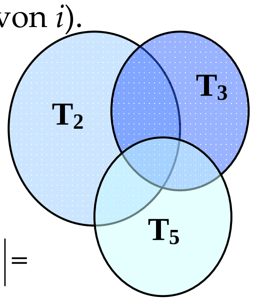


$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|$$

(Diskussion)

Frage: Wie sieht es mit 4 Mengen *A*, *B*, *C*, *D* aus?

Beispiel 1: Wie vielen Zahlen zwischen 1 und 100 sind durch 2, 3 oder 5 teilbar?
Lösung: $T_i = \{m \in N | 1 \leq m \leq 100, i|m\}$, $i = 2, 3, 5$ (T_i = Menge der Vielfache von *i*).



$|T_2 \cup T_3 \cup T_5| = ?$

$$|T_2| = \frac{100}{2} = 50, |T_3| = \frac{100}{3} = 33, |T_5| = \frac{100}{5} = 20, |T_2 \cap T_3| = |T_6| = \frac{100}{6} = 16,$$

…

$$|T_2 \cup T_3 \cup T_5| = |T_2| + |T_3| + |T_5| - |T_2 \cap T_3| - |T_2 \cap T_5| - |T_3 \cap T_5| + |T_2 \cap T_3 \cap T_5| =$$

= 50+33+20-16-…..+3 = 74.

Bemerkung: Ähnlichkeit mit dem Sieb des Eratosthenes, wie viele Zahlen werden nach 3 Schritte des Verfahrens ausgesiebt? … (Beschreibung der Verfahren und Programm: Seite 95).

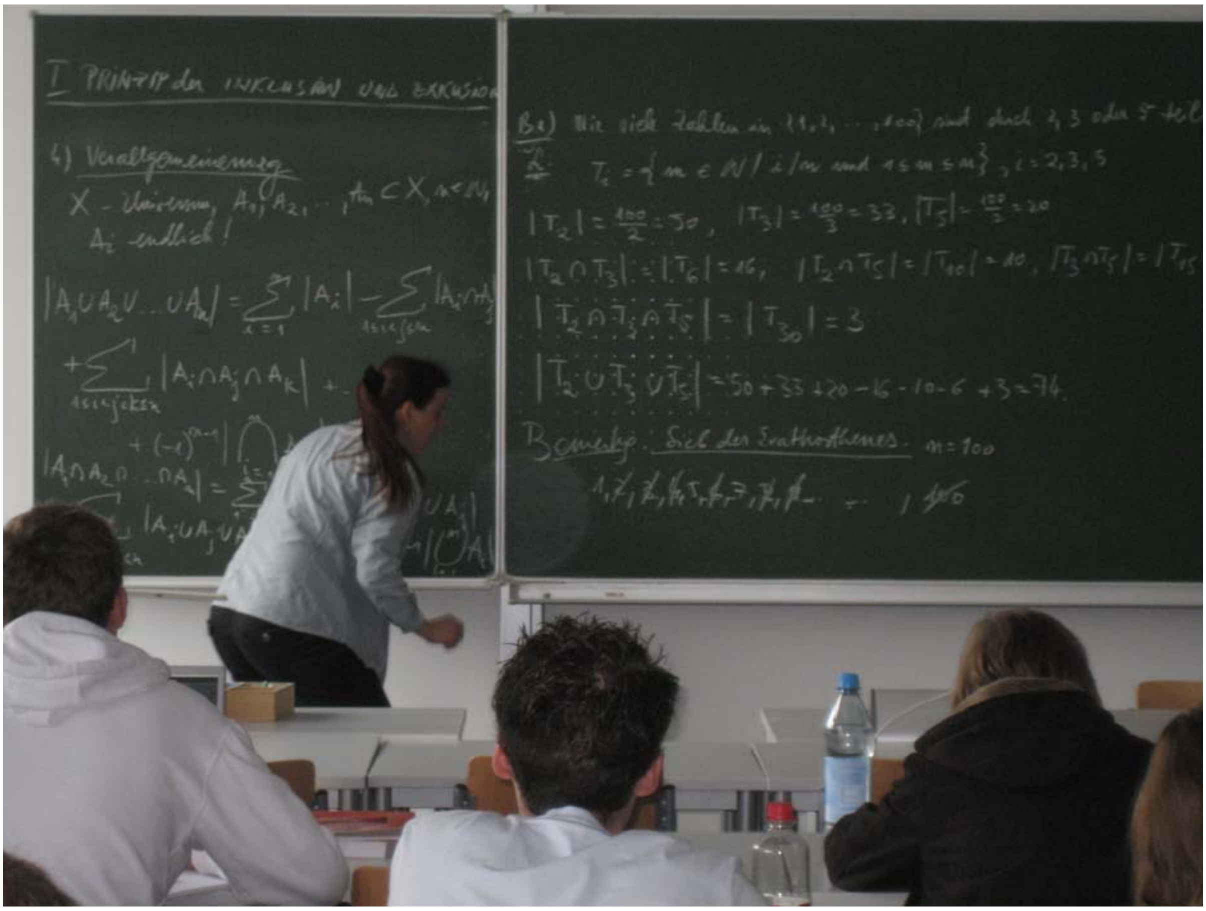
Verallgemeinerung: Es sei *X* eine endliche Menge und $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von *X*. Dann gelten:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \tag{1}$$

(Den Beweis kann man zum Beispiel durch vollständige Induktion erbringen).

Wenn man die Operationen „∪“ und „∩“ vertauscht, kommt man zu dieser Formel:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cup A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \tag{2}$$


I PRINZIP der INKLUSION UND EXKLUSION
1) Verallgemeinerung
Bemerkg. Sieb des Eratosthenes


KOMBINATORIK
(1) Prinzip der Inklusion und Exklusion
(2) Schubfachprinzip
(3) Permutationen
(4) Variationen
(5) Kombinationen
(6) Binomialkoeffizienten

Beispiel 2. Eulersche Phi-Funktion. $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ = die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis n, die teilerfremd zu n sind. $\varphi(n) = ?$

Lösung: Es sei $p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von n (Fundamentalsatz der Arithmetik).

Wir definieren:

$$A_i = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ ist Vielfaches von } p_i, m > 0 \text{ und } m \le n\}\text{, es folgt } |A_i| = \frac{n}{p_i}.$$

Es folgt auch:

$$A_i \cap A_j = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ ist Vielfaches von } p_i p_j, m > 0 \text{ und } m \le n\}$$

mit $|A_i \cap A_j| = \dfrac{n}{p_i p_j}$ $(i \neq \text{j})$.

Wir brauchen die Zahl $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$.

$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ (De Morgan) = …= (aus (1)) folgt:

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le r} \frac{n}{p_i p_j} - \ldots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$


I PRINZIP der INKLUSION UND EXKLUSION
4) Verallgemeinerung
X - Universum, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$
A_i endlich!
$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$
$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots +$
$+ (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|$
$\varphi(N) = ?$
Aus Fundamentalsatz der Arithmetik

Schubfachprinzip

(Taubenschlagprinzip, engl. *pingeonhole principle, Dirchlet's box principle*)

Fragen (Diskussion):

- 7 Tauben in 3 Ställe, was können wir darüber sagen? (ein St. mit mind. 3 T.)
- 3 Personen, was ist klar hier? (mind. 2 haben das selbe Geschlecht)
- n+1 Soldaten in n Betten? (mind. 1 Bett mit mehr als 1 Soldat)
- Wie viele Studenten brauche ich, um sicher zu sein, dass 2 davon dasselbe Geburtstagdatum haben? (366 in einem Jahr mit 365 Tagen…)

Satz. Wenn man n Objekte auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach, welches nicht weniger als $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ Objekte enthält, wobei $\lceil ... \rceil$ die Aufrundungsfunktion ist.

Oder anders formuliert:
Wenn man nk+1 Objekte auf k Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das mindestens n+1 Objekte beinhaltet.

Beispiel 1. Unter 11 beliebigen nat. Zahlen gibt es 2, deren Differenz durch 10 teilbar ist. Lösung: Es gibt mindestens 2 Zahlen, die bei Division durch 10 denselben Rest ergeben (0, 1, 2 …. oder 9, insgs. 10 Reste). D. h., dass deren Differenz durch 10 teilbar ist.

Beispiel 2. n Punkte in der Ebene, s. d. jeder Punkt mit mindestens einem weitern Punkt durch eine Strecke verbunden ist. Dann gibt es 2 Punkte, die Endpunkt jeweils gleich vieler Strecken sind. Lösung: Jeder Punkt ist ein Ausgangspunkt für mindestens eine und maximal n-1 Strecken. Weil wir n Punkte haben, folgt, dass es zwei gibt, von denen dieselbe Anzahl von Strecken ausgeht.

Bemerkung: Seite 157, mit Programm – Seite 186 (das kleinste Vielfache).

Permutationen

(Anordnungen mit Berücksichtigung der Reihenfolge)
A - eine endliche Menge mit n Elementen; Permutation – Anordnung der Elemente
Anzahl aller Permutationen = $P(n)$.

Satz 1. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt $P(n) = n!$.

Beispiel. Für $A = \{a, b, c\}$: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) und (c, b, a), also $P(3) = 6$.
Beispiel 1. Wie viele verschiedene Zahlen kann man mit den Ziffern 0, 1, .., 9 bilden, so dass jede Ziffer genau einmal in einer Zahl vorkommt?
Lösung: $10! - 9! = 9 \cdot 9! = 3.265.920$ … Diskussion.

Beispiel 2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Elemente der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ so anzuordnen, dass sich jede gerade Zahl wieder auf einer geraden Stelle in der Anordnung befindet? Lösung: $n! \cdot n! = (n!)^2$, Dikussion..

Beispiel 3. Ein Zug mit 10 Waggons. Alle Möglichkeiten, s. d. die Waggons 1 und 2 immer nacheinander kommen. Lösung: $9 \cdot 8! = 9!$.. Diskussion..

Permutationen von Elementen in mehreren Gruppen (mit Wiederholung). Alle Elemente von A haben eine bestimmte Eigenschaft, und man kann sie in Gruppen einteilen, deren Elemente identische Eigenschaften besitzen. Gesucht ist die Anzahl der Anordnungen, für die nur diese Eigenschaft relevant ist. Die Elemente einer Gruppe sind also austauschbar für eine derartige Anordnung. Wenn wir zum Beispiel 2 rote und 3 schwarze Bälle haben, dann sind die möglichen Anordnungen bezüglich der Eigenschaft „Farbe“: RRSSS, RSSSR, RSSRS, RSRSS, SRRSS, SRSRS, SRSSR, SSRRS, SSRSR, SSSRR. Die Anzahl lautet also $10 = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$.
Allgemein: Wenn für die Menge A mit n Elementen die Gruppen für die Elemente mit denselben Eigenschaften n_1, n_2, …, n_k Mitglieder haben, dann ist die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten gleich dem Multinomialkoeffizienten:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Beispiel 4. Wie viele Anordnungen der Buchstaben des Wortes BANANA gibt es? Lösung: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$.
Übungen (MISSISSIPPI, ABRACADABRA, SUCCESS).

Bemerkung: Seite 158, Programm für Generierung der Permutationen, mit Nachfolger-Algorithmus (Seite 173), mit *Backtracking* (Seite 365, Problem der n Türme).

Variationen

(Auswählen mit Berücksichtigung der Reihenfolge)

A - eine endliche Menge mit n Elementen; Es gibt mehrere Möglichkeiten, k Plätze ($k \leq n$) mit je einem Element aus A zu belegen (geordnete Mengen), und die Anzahl ist:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\,.$$

Beispiel 1. Mit den Elementen der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ könnte man 12 geordnete Mengen herstellen, die je zwei Elemente von A beinhalten:

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\},$
$\{b, a\}, \{b, c\}, \{b, d\},$
$\{c, a\}, \{c, b\}, \{c, d\},$
$\{d, a\}, \{d, b\}, \{d, c\}.$

Variationen mit Wiederholung (mit Zurücklegen). Es gibt n^k Möglichkeiten, k Plätze unter Beachtung der Reihenfolge mit je einem Element aus A zu belegen, wenn ein ausgewähltes Element wieder zurückgelegt werden kann. Das entspricht der Anzahl der geordneten Multimengen mit k Elementen aus einer Menge mit n Elementen.

Die Anzahl n^k ist so groß wie die Anzahl der Abbildungen einer Menge A mit k Elementen in eine Menge B mit n Elementen (oder der Anzahl der möglichen Funktionen f:$\{1, 2, \ldots, k\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$).

Beispiel 2. Mit den Elementen der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ kann man $16 = 4^2$ geordnete Multimengen mit je zwei Elementen von A erzeugen:

$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\},$
$\{b, a\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{b, d\},$
$\{c, a\}, \{c, b\}, \{c, c\}, \{c, d\},$
$\{d, a\}, \{d, b\}, \{d, c\}$ und $\{d, d\}.$

Beispiel 3. Wie viele binäre Wörter der Länge n gibt es?
Lösung: Anzahl der Multimengen mit n Elementen aus der Menge $\{0, 1\}$, also: 2^n. Für die Länge 3 zählen wir $2^3 = 8$ Wörter: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Bemerkung: Seite 160, Programm Generierung aller Variationen mit *Backtracking* (Seite 367, Türme auf die ersten m Reihen), Generierung aller Binärwörter mit Nachfolger (Seite 166, Teilmengen einer Menge) und Gray-Code (Seite 170).

Kombinationen

(Auswählen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)

A - eine endliche Menge mit n Elementen;
In Gegensatz zu Variationen bleibt hier die Reihenfolge der Elemente einer Auswahl unbeachtet, d.h. {1, 2, 3} ist gleichwertig mit {2, 3, 1}. Es gibt also weniger Kombinationen als Variationen.
Satz. Sei A eine endliche Menge mit n Elementen, und die Teilmengen von A mit k Elementen ($k \leq n$) sind gesucht. Die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung ist „n über k" (oder der Binomialkoeffizient):

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel 1. Wie viele fünfköpfige Prüfungskommissionen lassen sich mit acht Professoren herstellen? Lösung: $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$. Diskussion..

Beispiel 2. Wie viele Diagonalen hat ein konvexes n-Eck?
Lösung: $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n$. Diskussion..

Kombinationen mit Wiederholung (mit Zurücklegen). Aus einer Menge A mit n Elementen baut man k-Tupel ($k \leq n$) auf, wobei ein Element von A auch mehrmals gezogen werden kann. Die Anzahl der Multimengen mit k Elementen aus der Menge A ist:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Beispiel 3. Gerät, das mit zehn verschiedenen Obstsorten befüllt werden kann (grüne und rote Äpfel, Bananen, Orangen, Birnen, Kiwis, Grapefruits, Mandarinen, Pfirsichen, Mirabellen). Knopf „Nimm 3" … Wie viele Möglichkeiten der Ausgabe besitzt der Automat für den „Nimm 3"-Knopf?
Lösung: Die Antwort ist die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von 3 Elementen aus einer Menge mit 10 Elementen:

$$\binom{10+3-1}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220.$$

Bemerkung: Seite 161, Generierung aller Kombinationen (Seite 368, Aufsteigende Türme auf die ersten m Reihen).

Binomialkoeffizienten

Wenn x und y reelle Zahlen sind, dann gelten:

$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Satz. Allgemein lautet der sog. *Binomische Lehrsatz* für $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k .$$

Der „allgemeine Term“ der Summenbildung ist:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}y^k .$$

Beispiel 1. Finden Sie den fünften Term für $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)^{10}$.

Lösung: $T_5 = \binom{10}{4}\left(\sqrt{x}\right)^{10-4}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^4 = 210x^5\sqrt[3]{x^2}$.

Folgerungen aus dem Binomialsatz. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gelten die folgenden Gleichungen:

i. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für alle $n \geq 0$

ii. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$

iii. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$

iv. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots = 2^{n-1}$

Bemerkung: Seite 163, Programm mit Berechnung der Binomialkoeffizienten (Seite 180).

DANKE für Ihre Aufmerksamkeit!